Exercice 1:

Soit (Ω, P) l'espace probabilisé associé à l'exercice.
Il vérifie les conditions suivantes :
- $\Omega = \{1; ...; 6\}$.
- Il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $k \in \Omega$, $P(\{k\}) = \lambda k$.

De plus, $\sum\limits_{k=1}^{6} P(\{k\}) = \lambda \sum\limits_{k=1}^{6} k = 21\lambda$, donc $\lambda = \frac{1}{21}$. Soit A l'évènement : "obtenir un nombre pair".
On a : $P(A) = \frac{2}{21} + \frac{4}{21} + \frac{6}{21} = \frac{12}{21}$.

Exercice 2:

Soit (Ω, P) l'espace probabilisé associé à l'exercice.
Il vérifie les conditions suivantes :
- $\Omega = [\![1; 6]\!]^6$.
- La probabilité P est la probabilité uniforme sur Ω.

Soit A l'évènement : "obtenir les 6 numéros au cours des 6 lancers". Le cardinal de A est égal au nombre de permutations de $\{1; ...; 6\}$ donc il est égal à $6!$.
On a : $P(A) = \frac{\mathrm{card}(A)}{\mathrm{card}(\Omega)} = \frac{6!}{6^6} = \frac{5!}{6^5} = \frac{5}{324}$.

Exercice 3:

Soit (Ω, P) l'espace probabilisé associé à l'exercice.
Il vérifie les conditions suivantes :
- Ω est l'ensemble des tirages simultanés de 5 cartes parmi 52.
- La probabilité P est la probabilité uniforme sur Ω.

1. Soit A_1 l'évènement : "obtenir un carré (4 cartes de même valeur)".
   Un carré est fixé par la hauteur des 4 cartes de même valeur (13 possibilités) et par la valeur de la dernière carte ($52 - 4 = 48$ possibilités). Donc $\mathrm{card}(A_1) = 13 \times 48 = 624$.
   On a : $P(A_1) = \frac{\mathrm{card}(A_1)}{\mathrm{card}(\Omega)} = \frac{624}{\binom{52}{5}} = \frac{624}{2598960} = \frac{1}{4165}$.

2. Soit A_2 l'évènement : "obtenir une couleur (5 cartes de la même couleur ; les couleurs sont cœur, carreau, pique, trèfle)".
   Une couleur est fixée par la couleur des 5 cartes (4 possibilités) et par les hauteurs des cartes ($\binom{13}{5}$ possibilités). Donc $\mathrm{card}(A_2) = 4\binom{13}{5} = 5148$.
   On a : $P(A_2) = \frac{\mathrm{card}(A_2)}{\mathrm{card}(\Omega)} = \frac{5148}{2598960} = \frac{33}{16660}$.

3. Soit A_3 l'évènement : "obtenir une suite (5 cartes dont les valeurs se suivent dans l'ordre suivant : A (as), 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, J (valet), Q (dame), K (roi), A ; l'as compte à la fois comme valeur inférieure et comme valeur supérieure)".
   Une suite est fixé par la hauteur de la plus petite valeur (10 possibilités) et par la couleur de chaque carte (4^5 possibilités). Donc $\mathrm{card}(A_3) = 10 \times 4^5 = 10240$.
   On a : $P(A_3) = \frac{\mathrm{card}(A_3)}{\mathrm{card}(\Omega)} = \frac{10240}{2598960} = \frac{128}{32487}$.

Exercice 4:

Soit (Ω, P) l'espace probabilisé associé à l'exercice.
Il vérifie les conditions suivantes :
- Ω est l'ensemble des distributions possibles lors d'une partie de bridge.
- La probabilité P est la probabilité uniforme sur Ω.

Il y a $\binom{52}{13}$ mains possibles pour le premier joueur, puis $\binom{39}{13}$ mains possibles pour le deuxième joueur, puis $\binom{26}{13}$ mains possibles pour le troisième joueur et $\binom{13}{13}$ mains possibles pour le dernier joueur. Donc $\text{card}(\Omega) = \binom{52}{13}\binom{39}{13}\binom{26}{13}\binom{13}{13}$.
Soit A l'évènement : "chaque joueur reçoit un as".
Pour que chaque joueur reçoive un as, il faut choisir la distribution des as (4! possibilités) puis distribuer le restant des cartes ($\binom{48}{12}\binom{36}{12}\binom{24}{12}\binom{12}{12}$ possibilités). Donc $\text{card}(A) = 4!\binom{48}{12}\binom{36}{12}\binom{24}{12}\binom{12}{12}$.
On a : $P(A) = \frac{\text{card}(A)}{\text{card}(\Omega)}$.

<u>Exercice 5</u>:

Soit (Ω, P) l'espace probabilisé associé à l'exercice.
Il vérifie les conditions suivantes :
- Ω est l'ensemble des listes des dates d'anniversaires des étudiants.
- La probabilité P est la probabilité uniforme sur Ω.

Soit A l'évènement : "au moins deux étudiants sont nés le même jour".
On va raisonner sur l'évènement $\overline{A}$: "les étudiants sont tous nés des jours différents".
On a : $P(A) = 1 - P(\overline{A}) = 1 - \frac{\text{card}(\overline{A})}{\text{card}(\Omega)} = 1 - \frac{365\times 364\times\cdots\times 318}{365^{48}} \simeq 0,96$.
De manière plus générale, pour n étudiants, on a $P(A) = 1 - \frac{365!}{(365-n)!365^n}$.

```
def exo5(a):
    p=1
    n=1
    while 1-p<a:
        p=p*(365-n)/365
        n=n+1
    return(n)
```

La commande exo5(0.5) renvoie 23.

<u>Exercice 6</u>:

Soit A l'évènement : "on tire une boule noire".
Pour tout $k \in [\![1, 20]\!]$, notons D_k l'évènement : "le résultat du dé est k".

1. Le système $(D_k)_{k\in[\![1,20]\!]}$ est un système complet d'évènements, d'après la formule des probabilités totales,
$$P(A) = \sum_{k=1}^{20} P(D_k)P(A|D_k) = \frac{1}{20}\sum_{k=1}^{20}\frac{20-k}{20} = \frac{1}{400}\times\frac{19\times 20}{2} = \frac{19}{40}\,.$$

2. D'après la formule de Bayes, on a :
$$P(D_1|A) = \frac{P(A|D_1)P(D_1)}{P(A)} = \frac{1}{20}\times\frac{19}{20}\times\frac{40}{19} = \frac{1}{10}\,.$$

<u>Exercice 7</u>:

Expérience aléatoire : on choisit une personne de façon équiprobable parmi les nouveaux clients d'une compagnie d'assurance.
Soit A l'évènement : "cette personne est victime d'un accident pendant l'année qui suit la signature de son contrat".
Notons B l'évènement "cette personne est un client enclin aux accidents".
Notons C l'évènement "cette personne est un client qui a peu d'accidents".
Le système (B, C) est un système complet d'évènements, d'après la formule des probabilités totales :
$$P(A) = P(B)P(A|B) + P(C)P(A|C) = 0,2\times 0,5 + 0,8\times 0,1 = 0,18\,.$$

Conclusion : la probabilité qu'un nouvel assuré soit victime d'un accident pendant l'année qui suit la signature de son contrat est de 18%.

Exercice 8: Soit $n \in \mathbb{N}$. On note A_n, respectivement B_n, C_n, les événements : " Après le n-ième saut, la puce est au point A, respectivement B, C " et a_n, b_n, c_n leurs probabilités respectives.

1. Le système (A_1, B_1, C_1) est un système complet d'évènements, d'où $P(A_1)+P(B_1)+P(C_1) = 1$ i.e. $p+2q = 1$. On a $q \geqslant 0$ et $p = 1-2q \geqslant 0$. Donc $q \in [0; \frac{1}{2}]$.

2. Le système (A_n, B_n, C_n) est un système complet d'évènements, d'après la formule des probabilités totales
$$P(A_{n+1}) = P(A_n)P(A_{n+1}|A_n) + P(B_n)P(A_{n+1}|B_n) + P(C_n)P(A_{n+1}|C_n)$$
i.e. $a_{n+1} = pa_n + qb_n + qc_n = (1-2q)a_n + qb_n + qc_n$.

3. De même, $b_{n+1} = qa_n + (1-2q)b_n + qc_n$ et $c_{n+1} = qa_n + qb_n + (1-2q)c_n$. Donc
$$\begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \\ c_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (1-2q) & q & q \\ q & (1-2q) & q \\ q & q & (1-2q) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix}.$$
On notera $M = \begin{pmatrix} (1-2q) & q & q \\ q & (1-2q) & q \\ q & q & (1-2q) \end{pmatrix}$.

4. $M = (1-3q)I_3 + qU$. On a, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $U^n = 3^{n-1}U$. Soit $n \in \mathbb{N}^*$,
$$\begin{aligned} M^n &= ((1-3q)I_3 + qU)^n \\ &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} q^k (1-3q)^{n-k} U^k \\ &= (1-3q)^n I_3 + \left(\sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} q^k (1-3q)^{n-k} 3^{k-1} \right) U \\ &= (1-3q)^n I_3 + \left(\frac{1}{3} \left((3q+1-3q)^n - (1-3q)^n \right) \right) U \\ &= (1-3q)^n I_3 + \frac{1}{3} \left(1 - (1-3q)^n \right) U \end{aligned}$$
De plus, cette formule est vraie pour $n = 0$.

5. On a $\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix} = M^n \begin{pmatrix} a_0 \\ b_0 \\ c_0 \end{pmatrix} = \left((1-3q)^n I_3 + \frac{1}{3}\left(1-(1-3q)^n\right) U \right) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (1-3q)^n + \frac{1}{3}\left(1-(1-3q)^n\right) \\ \frac{1}{3}\left(1-(1-3q)^n\right) \\ \frac{1}{3}\left(1-(1-3q)^n\right) \end{pmatrix}$
On a $q \in [0; \frac{1}{2}]$, d'où $1-3q \in [-\frac{1}{2}; 1]$.
<u>Cas $q = 0$:</u> $1-3q = 1$, donc $\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.
<u>Cas $q \neq 0$:</u> $1-3q \in]-1; 1[$, donc $\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix} \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix}$.
Asymptotiquement, même si la puce était initialement en A, elle a autant de chance de se trouver sur les sommets A, B ou C (sauf dans le cas trivial où $q = 0$ ce qui signifie que la puce ne bouge jamais et donc reste sur le sommet A).

Exercice 9:

Soit $n \in \mathbb{N}$.
Soit A_n l'évènement : "l'appareil fonctionne à la date n".
On suppose que l'appareil est en état de marche à la date 0 et on note $p_n = P(A_n)$ la probabilité qu'il soit en état de marche à la date n.
Le système $(A_n, \overline{A_n})$ est un système complet d'évènements, d'après la formule des probabilités totales :
(Supposons que $p_n \neq 0$ et $p_n \neq 1$)
$p_{n+1} = P(A_{n+1}) = P(A_n)P(A_{n+1}|A_n) + P(\overline{A_n})P(A_{n+1}|\overline{A_n}) = ap_n + (1-b)(1-p_n) = (a+b-1)p_n + 1 - b$.
(Formule reste vraie pour $p_n = 0$ et $p_n = 1$)
La suite $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc une suite arithmético-géométrique.
En posant $r = \frac{1-b}{2-a-b}$, on a :

$$p_n = (a+b-1)^n(p_0 - r) + r = (a+b-1)^n\left(1 - \frac{1-b}{2-a-b}\right) + \frac{1-b}{2-a-b}.$$

Comme $|(a+b-1)| < 1$, on a $\lim\limits_{n\to\infty} p_n = \frac{1-b}{2-a-b}$.

Exercice 10: Si le candidat ne change pas, il a une chance sur 3 de gagner la voiture.
Considérons à présent le cas où le candidat change de porte.
Supposons que le candidat choisisse la porte n°1, le raisonnement serait identique dans les deux autres cas et notons :

- V_1 (respectivement V_2 et V_3) : la voiture se trouve derrière la porte n°1 (resp. 2 et 3)
- O_1 (respectivement O_2 et O_3): l'animateur ouvre la porte perdante n°1 (resp. 2 et 3)

Supposons alors que l'animateur ouvre la porte n°3 – le raisonnement est le même s'il ouvre la porte n°2.
La probabilité que le candidat gagne en changeant son choix est alors la probabilité que la voiture soit derrière la porte n°2 sachant que l'animateur a ouvert la porte n°3, c'est-à-dire $P(V_2|O_3)$. Or, d'après la formule de Bayes (appliquée au s.c.e. (V_1, V_2, V_3)) :

$$P(V_2|O_3) = \frac{P(O_3|V_2)P(V_2)}{P(O_3|V_1)P(V_1) + P(O_3|V_2)P(V_2) + P(O_3|V_3)P(V_3)} = \frac{1 \times \frac{1}{3}}{\frac{1}{2} \times \frac{1}{3} + 1 \times \frac{1}{3} + 0 \times \frac{1}{3}} = \frac{2}{3}$$

En effet, si la voiture est derrière la porte n°2 et que j'ai choisi la porte n°1 au premier tirage, la seule porte que peut ouvrir l'animateur est la porte n°3 donc $P(O_3|V_2) = 1$. Si la voiture est derrière la porte n°3, l'animateur ne peut pas l'ouvrir donc $P(O_3|V_3) = 0$ et si la voiture est derrière la porte n°1, l'animateur a deux choix équiprobables (la porte n°2 ou la porte n°3), donc $P(O_3|V_1) = \frac{1}{2}$.

Exercice 11:

1. Notons T l'événement : "le dé choisi est pipé".
   Notons A l'événement : "On obtient le chiffre 6 lors du lancer".
   On demande de calculer $P_A(T)$.
   Le système $(T, \overline{T})$ est un système complet d'événements de probabilités non nulles.
   On a d'ailleurs $P(T) = \frac{1}{4}$ et $P(\overline{T}) = \frac{3}{4}$.
   Alors, d'après la formule de Bayes pour un système complet d'évènement, on a :

$$P_A(T) = \frac{P_T(A)P(T)}{P_T(A)P(T) + P_{\overline{T}}(A)P(\overline{T})} = \frac{\frac{1}{2} \times \frac{1}{4}}{\frac{1}{2} \times \frac{1}{4} + \frac{1}{6} \times \frac{3}{4}} = \frac{1}{2}$$

2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour tout $k \in [\![1; n]\!]$, notons A_k l'événement : "On obtient le chiffre 6 lors du k-ième lancer".
   Posons $A_n = \bigcap\limits_{k=1}^{n} A_k$.

On demande de calculer $p_n = P_{A_n}(T)$. D'après la formule de Bayes pour un système complet d'évènement, on a :

$$P_{A_n}(T) = \frac{P_T(A_n)P(T)}{P_T(A_n)P(T) + P_{\overline{T}}(A_n)P(\overline{T})} = \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^n \times \frac{1}{4}}{\left(\frac{1}{2}\right)^n \times \frac{1}{4} + \left(\frac{1}{6}\right)^n \times \frac{3}{4}} = \frac{1}{1 + \frac{1}{3^{n-1}}}$$

3. On a $\lim\limits_{n\to+\infty} p_n = 1$. Ce qui signifie que, lorsqu'on effectue un nombre élevé de lancers, si on n'obtient que des 6 sur ces lancers alors il est quasiment certain que le dé tiré au hasard au départ soit pipé.

Exercice 12: Notons A (resp. B) l'évènement : "la boule dorée est dans l'urne A (resp. B)".
Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, notons A_n (resp. B_n) l'évènement : "en effectuant le n-ième tirage dans l'urne A (resp. B), on trouve la boule dorée".

1. Calculons $P(A_1)$ et $P(B_1)$:

$$P(A_1) = P(A_1 \cap A) + P(A_1 \cap B) = P(A)P(A_1|A) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$$

$$P(B_1) = P(B_1 \cap A) + P(B_1 \cap B) = P(B)P(B_1|B) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{6} = \frac{1}{12}$$

Il est donc judicieux d'effectuer son tirage dans l'urne A.

2. Calculons à présent : $P(A_2|\overline{A_1})$ et $P(B_2|\overline{A_1})$.

$$P(A_2|\overline{A_1}) = P(A_2 \cap A|\overline{A_1}) + P(A_2 \cap B|\overline{A_1}) = \frac{P(A_2 \cap \overline{A_1} \cap A)}{P(\overline{A_1})} = \frac{P(A)P(\overline{A_1}|A)P(A_2|\overline{A_1} \cap A)}{P(\overline{A_1})} = \frac{\frac{1}{2} \times \frac{2}{3} \times \frac{1}{3}}{\frac{5}{6}} = \frac{2}{15}$$

$$P(B_2|\overline{A_1}) = P(B_2 \cap A|\overline{A_1}) + P(B_2 \cap B|\overline{A_1}) = \frac{P(B_2 \cap \overline{A_1} \cap B)}{P(\overline{A_1})} = \frac{P(B)P(\overline{A_1}|B)P(B_2|\overline{A_1} \cap B)}{P(\overline{A_1})} = \frac{\frac{1}{2} \times 1 \times \frac{1}{6}}{\frac{5}{6}} = \frac{1}{10}$$

Il est encore judicieux d'effectuer son tirage dans l'urne A.

3. Calculons à présent : $P(A_3|\overline{A_1} \cap \overline{A_2})$ et $P(B_3|\overline{A_1} \cap \overline{A_2})$.

$$\begin{aligned} P(A_3|\overline{A_1} \cap \overline{A_2}) &= P(A_3 \cap A|\overline{A_1} \cap \overline{A_2}) + P(A_3 \cap B|\overline{A_1} \cap \overline{A_2}) \\ &= \frac{P(A_3 \cap \overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap A)}{P(\overline{A_1} \cap \overline{A_2})} \\ &= \frac{P(A)P(\overline{A_1}|A)P(\overline{A_2}|\overline{A_1} \cap A)P(\overline{A_3}|\overline{A_2} \cap \overline{A_1} \cap A)}{P(\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap A) + P(\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap B)} \\ &= \frac{P(A)P(\overline{A_1}|A)P(\overline{A_2}|\overline{A_1} \cap A)P(\overline{A_3}|\overline{A_2} \cap \overline{A_1} \cap A)}{P(A)P(\overline{A_1}|A)P(\overline{A_2}|\overline{A_1} \cap A) + P(B)P(\overline{A_1}|B)P(\overline{A_2}|\overline{A_1} \cap B)} \\ &= \frac{\frac{1}{2} \times \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} \times \frac{1}{3}}{\frac{1}{2} \times \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} + \frac{1}{2} \times 1 \times 1} = \frac{\frac{1}{3}}{1 + \frac{9}{4}} = \frac{4}{39} \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} P(B_3|\overline{A_1} \cap \overline{A_2}) &= P(B_3 \cap A|\overline{A_1} \cap \overline{A_2}) + P(B_3 \cap B|\overline{A_1} \cap \overline{A_2}) \\ &= \frac{P(B_3 \cap \overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap B)}{P(\overline{A_1} \cap \overline{A_2})} \\ &= \frac{\frac{1}{2} \times 1 \times 1 \times \frac{1}{6}}{\frac{1}{2} \times \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} + \frac{1}{2} \times 1 \times 1} = \frac{\frac{1}{6}}{\frac{4}{9} + 1} = \frac{3}{26} \end{aligned}$$

Il est donc à présent judicieux de faire son tirage dans l'urne B.

Exercice 13:

On tire une carte au hasard dans un jeu de 52 cartes. On note D l'événement : " la carte tirée est une dame ". $P(D) = \frac{1}{13}$.

1. A_1 : " la carte est un pique ".
   $P(A_1 \cap D) = \frac{1}{52}$ et $P(A_1) = \frac{1}{4}$, donc $P(A_1 \cap D) = P(A_1) \times P(D)$, d'où A_1 et D sont indépendants.

2. A_2 : " la carte est noire " (pique ou trèfle).
   $P(A_2 \cap D) = \frac{2}{52}$ et $P(A_2) = \frac{1}{2}$, donc $P(A_2 \cap D) = P(A) \times P(D)$, d'où A_2 et D sont indépendants.

3. A_3 : " la carte est une figure " (un roi, une dame ou un valet).
   $P(A_3 \cap D) = \frac{1}{13}$ et $P(A_3) = \frac{3}{13}$, donc $P(A_3 \cap D) \neq P(A_3) \times P(D)$, d'où A_3 et D ne sont pas indépendants.

4. A_4 : " la carte n'est pas un as ".
   $P(A_4 \cap D) = \frac{1}{13}$ et $P(A_4) = \frac{12}{13}$, donc $P(A_4 \cap D) \neq P(A_4) \times P(D)$, d'où A_4 et D ne sont pas indépendants.

5. A_5 : " la carte est la dame de pique ".
   $P(A_5 \cap D) = \frac{1}{52}$ et $P(A_5) = \frac{1}{52}$, donc $P(A_5 \cap D) \neq P(A_5) \times P(D)$, d'où A_5 et D ne sont pas indépendants.

Exercice 14:

On lance trois fois de suite une pièce équilibrée, et on considère les événements suivants :

- A : " le premier lancer donne pile " ;
- B : " le deuxième lancer donne face " ;
- C : " les trois lancers donnent le même résultat ".

Les événements A, B et C ne sont pas mutuellement indépendants. En effet, l'évènement $A \cap B \cap C$ est l'évènement impossible, d'où $P(A \cap B \cap C) = 0 \neq P(A)P(B)P(C)$.

Cependant, les évènements sont deux à deux indépendants. En effet,
- $P(A \cap B) = \frac{1}{4} = P(A) \times P(B)$.
- $P(B \cap C) = \frac{1}{8} = P(B) \times P(C)$.
- $P(A \cap C) = \frac{1}{8} = P(A) \times P(C)$.

Exercice 15:

Une urne U_1 contient deux boules blanches et une boule rouge.
Une urne U_2 contient deux boules rouges et une boule blanche.
On lance un dé : s'il fait 6, on choisit l'urne U_1, et sinon U_2 ; puis on tire deux boules successivement et avec remise dans l'urne qui a été choisie.
On définit les événements :

- B_1 : " la première boule tirée est blanche " ;
- B_2 : " la seconde boule tirée est blanche ".
- Pour tout $k \in \{1, ..., 6\}$, D_k : " le résultat du dé est k ".

Le système $(D_6, \overline{D_6})$ est un système complet d'évènements, d'après la formule des probabilités totales :

$$P(B_1) = P(B_2) = P(D_6)P(B_1|D_6) + P(\overline{D_6})P(B_1|\overline{D_6}) = \frac{1}{6} \times \frac{2}{3} + \frac{5}{6} \times \frac{1}{3} = \frac{7}{18},$$

et

$$P(B_1 \cap B_2) = P(D_6)P(B_1 \cap B_2|D_6) + P(\overline{D_6})P(B_1 \cap B_2|\overline{D_6}) = \frac{1}{6} \times \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} + \frac{5}{6} \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{9}{54} = \frac{1}{6}\,.$$

D'où $P(B_1 \cap B_2) \neq P(B_1) \times P(B_2)$.
Les événements B_1 et B_2 ne sont pas indépendants.

Exercice 16:

Le système $(D_6, \overline{D_6})$ est un système complet d'évènements, d'après la formule des probabilités totales :

$$P(B_1) = P(D_6)P(B_1|D_6) + P(\overline{D_6})P(B_1|\overline{D_6}) = \frac{1}{6} \times \frac{2}{3} + \frac{5}{6} \times \frac{1}{3} = \frac{7}{18}\,,$$

et

$$P(B_1 \cap B_2) = P(D_6)P(B_1 \cap B_2|D_6) + P(\overline{D_6})P(B_1 \cap B_2|\overline{D_6}) = \frac{1}{6} \times \frac{1}{3} + \frac{5}{6} \times 0 = \frac{1}{18}\,.$$

Le système $(D_6 \cap B_1, \overline{D_6} \cap B_1, D_6 \cap \overline{B_1}, \overline{D_6} \cap \overline{B_1})$ est un système complet d'évènements, d'après la formule des probabilités totales :

$$\begin{aligned} P(B_2) &= P(D_6 \cap B_1)P(B_2|D_6 \cap B_1) + P(\overline{D_6} \cap B_1)P(B_2|\overline{D_6} \cap B_1) \\ &\quad + P(D_6 \cap \overline{B_1})P(B_2|D_6 \cap \overline{B_1}) + P(\overline{D_6} \cap \overline{B_1})P(B_2|\overline{D_6} \cap \overline{B_1}) \\ &= \frac{2}{18} \times \frac{1}{2} + \frac{5}{18} \times 0 + \frac{1}{18} \times 1 + \frac{10}{18} \times \frac{1}{2} \\ &= \frac{14}{36} = \frac{7}{18}\,. \end{aligned}$$

D'où $P(B_1 \cap B_2) \neq P(B_1) \times P(B_2)$.
Les événements B_1 et B_2 ne sont pas indépendants.